Teoremas do Momento Linear e do Momento Angular

A eq. de Newton, na forma

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F},$$

pode ser integrada (escalarmente) em relação ao tempo, fornecendo:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \, \vec{F}$$

• Def. Impulso

"Impulso" fornecido pela força : $\int_{t_1}^{t_2} dt \, \vec{F}$

$$\Delta\vec{p} \equiv \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \vec{F}$$

"A variação do momentum linear num dado intervalo de tempo, é igual ao impulso da força no mesmo intervalo".

Pesquisamos agora o momento angular $\vec{L}$:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

O valor do momentum angular depende da escolha da origem. Derivamos em relação ao tempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \underbrace{\vec{v} \times (m\vec{v})}_{0} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}}$$

$$= \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \overset{\text{Newton}}{=} \vec{r} \times \vec{F}$$

• **Def.** Torque de força, $\vec{N}$

$$\vec{N} \equiv \vec{r} \times \vec{F}$$

A eq. fica:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N},$$

e se o torque da força for nulo, o momentum angular é <u>conservado</u>:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{cte}.$$

Em geral temos:

$$\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \Delta\vec{L} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{N}$$

Caso de uma força central: $\vec{F} = F(r)\,\hat{r}$

Calcular o torque:

$$\vec{N} = \vec{r} \times F(r)\hat{r} = rF(r)(\hat{r}\times\hat{r}) = 0.$$

Teorema. Para uma força central, o momento angular é conservado. A órbita resulta planar.
Este teorema pode ser usado para integrar a eq. de movimento usando a conservação da energia.

§ Propriedades gerais do movimento em 3-dim

Em geral, usando coordenadas cartesianas, as equações de movimento estão acopladas:

$$m\ddot{x} = F_x(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z};t)$$

$$m\ddot{y} = F_y(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z};t)$$

$$m\ddot{z} = F_z(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z};t)$$

Condições iniciais em t_0:

São dadas a posição inicial $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e a velocidade inicial $\vec{v}_0 = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$.

Em casos particulares as equações podem ser desacopladas.

Ex. 1 Oscilador Harmônico 3-dim

A força tem a forma:

$$\vec{F} = -\hat{\imath}\, k_x x - \hat{\jmath}\, k_y y - \hat{k}\, k_z z.$$

Esta força é evidentemente conservativa, com energia potencial dada por:

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2} k_x x^2 + \frac{1}{2} k_y y^2 + \frac{1}{2} k_z z^2 + cte.$$

As eqs. de Newton ficam desacopladas:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -k_x x, \\ m\ddot{y} = -k_y y, \\ m\ddot{z} = -k_z z, \end{cases}$$

com soluções imediatas, dadas por:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_x t + \theta_x),$$

$$y(t) = A_2 \cos(\omega_y t + \theta_y),$$

$$z(t) = A_3 \cos(\omega_z t + \theta_z),$$

com as frequências:

$$\omega_x = \sqrt{\frac{k_x}{m}}, \quad \omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}}, \quad \omega_z = \sqrt{\frac{k_z}{m}}$$

Em geral, a trajetória da partícula de massa m não é fechada. Só será fechada se as três frequências $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ forem comensuráveis. Isto é, existem três números inteiros (n_x, n_y, n_z), tal que

$$\frac{\omega_x}{n_x} = \frac{\omega_y}{n_y} = \frac{\omega_z}{n_z}.$$

Isso, porque depois de um tempo Δt

$$\Delta t = \frac{2\pi n_x}{\omega_x} = \frac{2\pi n_y}{\omega_y} = \frac{2\pi n_z}{\omega_z},$$

o sistema volta à condição inicial:

$$\omega_x \Delta t = 2\pi n_x, \quad \omega_y \Delta t = 2\pi n_y, \quad \omega_z \Delta t = 2\pi n_z.$$

O menor conjunto $(\bar{n}_x, \bar{n}_y, \bar{n}_z)$, sem fatores comuns, fornece o período do movimento:

$$T = \frac{2\pi \bar{n}_x}{\omega_x} = \frac{2\pi \bar{n}_y}{\omega_y} = \frac{2\pi \bar{n}_z}{\omega_z}$$

<u>Caso importante</u>: Oscilador espacial

É o caso isotrópico, com $k_x = k_y = k_z = k$.

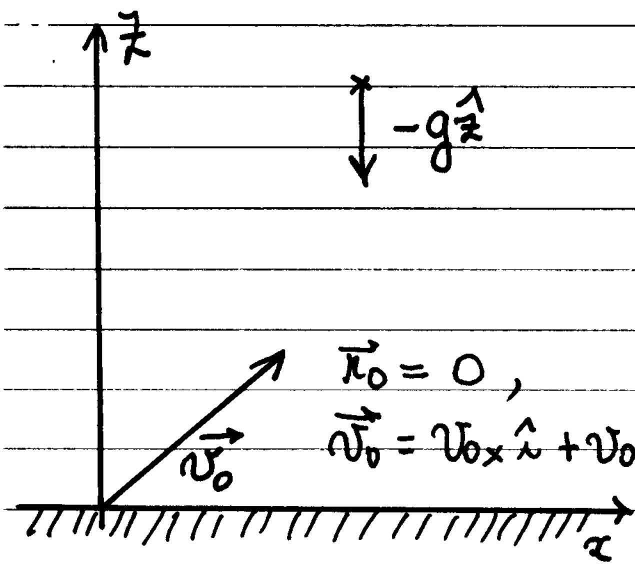
A força fica:
$$\vec{F} = -k(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}) = -k\vec{r}$$

e temos apenas uma frequência angular

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Sabemos que o momento angular, para uma força central, é conservado. A órbita fica num plano e é fechada.

Ex. 2 Projetis



$\vec{r}_0 = 0$,
$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0z}\hat{k}$

Supomos que o movimento acontece no plano $y=0$. As equações do movimento, na forma vetorial, se escrevem:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -mg\hat{z} - b\frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (*)$$

onde b é o coeficiente de atrito do ar. Como no caso unidimensional, definimos

$$\tau = \frac{m}{b} \quad \text{ou} \quad \tau^{-1} = \frac{b}{m}.$$

As componentes de $(*)$ são:

$$m\frac{dv_x}{dt} = -b\,v_x \qquad (1)$$

$$m\frac{dv_z}{dt} = -mg - bv_z \qquad (2)$$

De maneira equivalente:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\tau} v_x \,, \qquad (1)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -g - \frac{1}{\tau} v_z \,, \qquad (2)$$

com condição inicial $v_x(0) = v_{0x}$, $v_z(0) = v_{0z}$.

A eq. (1) é do movimento amortecido simples. A eq. (2) é a mesma do problema do paraquedista. Soluções:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{x0}\, e^{-t/\tau} \,, \\ x(t) = \tau v_{x0} \left(1 - e^{-t/\tau}\right) , \end{cases} \qquad (1')$$

$$\begin{cases} v_z(t) = -g\tau + (v_{0z} + g\tau)^{-t/\tau} \,, \\ z(t) = -g\tau t + \tau(v_{0z} + g\tau)\left(1 - e^{-t/\tau}\right) , \end{cases} \qquad (2')$$

que fornecem a órbita na forma paramétrica. De (1') podemos eliminar o parâmetro (tempo), dando:

$$\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = \frac{x}{\tau v_{0x}}$$

e

$$t = \tau \ln\left(\frac{\tau v_{0x}}{\tau v_{0x} - x}\right)$$

e substituindo em (2'), obtemos:

$$z = x\left(\frac{v_{0z}+g\tau}{v_{0x}}\right) - g\tau^2 \ln\left(\frac{\tau v_{0x}}{\tau v_{0x} - x}\right)$$

$$z = \left(\frac{v_{0z}+g\tau}{v_{0x}}\right)x + g\tau^2 \ln\left(1 - \frac{x}{\tau v_{0x}}\right).$$

Interessa a grandeza $\dfrac{x}{\tau v_{0x}}$.

Quando

$$\frac{x}{\tau v_{0x}} = \frac{bx}{m v_{0x}} \ll 1 \text{ for pequena,}$$

expandimos o ln na forma:

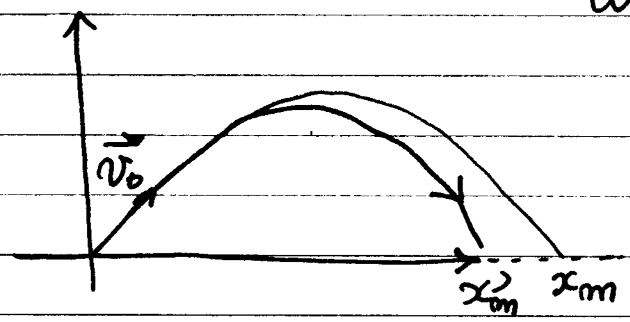
$$\ln\left(1 - \frac{x}{\tau v_{0x}}\right) = -\frac{x}{\tau v_{0x}} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\tau v_{0x}}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{\tau v_{0x}}\right)^3 \cdots$$

Expandindo até essa ordem, obtemos a primeira correção devida ao atrito

$$z \approx \frac{v_{0z}+\cancel{g\tau}}{v_{0x}}x + g\tau^2\left\{-\frac{\cancel{x}}{\cancel{\tau} v_{0x}} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\tau v_{0x}}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{\tau v_{0x}}\right)^3\right\}$$

$$z \approx \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_{0x}^2} - \frac{1}{3}g\frac{x^3}{\tau v_{0x}^3}$$

Os dois primeiros termos representam o movimento parabólico sem atrito, e o terceiro fornece a correção do atrito do ar, decrescendo o alcance máximo x_m.



O alcance máximo é obtido da equação:

$$0 = x_m \left\{ \frac{v_{0z}}{v_{0x}} - \frac{g}{2v_{0x}^2} x_m - \frac{g}{3\tau v_{0x}^3} x_m^2 \cdots \right\}$$

Descartamos a solução $x_m = 0$, que fornece a condição inicial. Assim.

$$\frac{g}{2v_{0x}^2} x_m = \frac{v_{0z}}{v_{0x}} - \frac{g}{3\tau v_{0x}^3} x_m^2 \cdots ,$$

Reescrita como:

$$x_m = \frac{2 v_{0x} v_{0z}}{g} - \frac{2}{3} \frac{1}{\tau v_{0x}} x_m^2 \cdots$$

Resolvemos essa eq. de maneira iterativa. Em ordem mais baixa:

$$x_m^{(0)} = \frac{2 v_{0x} v_{0z}}{g},$$

que fornece a solução sem atrito. Na ordem seguinte:

$$x_m^{(1)} = \frac{2 v_{0x} v_{0z}}{g} - \frac{2}{3} \frac{1}{\tau v_{0x}} \left(x_m^{(0)}\right)^2 \cdots$$

$$= \frac{2 v_{0x} v_{0z}}{g} - \frac{8}{3} \frac{v_{0x} v_{0z}^2}{\tau g^2} \cdots,$$

que corrige para baixo o valor de x_m. Note que a solução pode ser escrita como

$$x_m = \frac{2 v_{0x} v_{0z}}{g} \left\{ 1 - \frac{4}{3} \frac{v_{0z}}{\tau g} \cdots \right\},$$

de maneira que a correção depende da velocidade de disparo v_{0z}.

<u>Resultado</u>: diminuindo a inclinação aumentamos o alcance máximo.

Porque este resultado foi desafiado pelos grandes canhões da 1ª Guerra?

§ Coordenadas Curvilíneas

Passamos de coordenadas cartesianas, para um conjunto de coordenadas curvilíneas arbitrário (q_1, q_2, q_3)

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(x,y,z) \\ q_2 &= q_2(x,y,z) \\ q_3 &= q_3(x,y,z) \end{aligned} \iff \begin{aligned} x &= x(q_1,q_2,q_3) \\ y &= y(q_1,q_2,q_3) \\ z &= z(q_1,q_2,q_3) \end{aligned}$$

Para coordenadas cartesianas, temos o deslocamento infinitesimal:

$$d\vec{r} = \hat{\imath}\, dx + \hat{\jmath}\, dy + \hat{k}\, dz ,$$

com as relações:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \hat{\imath} , \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \hat{\jmath} , \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \hat{k} ,$$

onde $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ é a base de vetores unitários (ortonormais). Note que o vetor $\hat{\imath}$ aponta na direção de crescimento da coordenada x. Queremos estender este conceito para coordenadas arbitrárias; tratando os vetores:

$$\vec{D}_{q_1} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} , \quad \vec{D}_{q_2} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} , \quad \vec{D}_{q_3} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} .$$

Um objeto importante é o quadrado do elemento de distância ds^2

$$ds^2 \equiv d\vec{r}\cdot d\vec{r} = d\vec{r}^{\,2} = \sum_{ij} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}\right) dq_i\, dq_j$$

▸ Def. Tensor métrico:

$$g_{ij} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = \vec{D}_{q_i}\cdot\vec{D}_{q_j} = g_{ji}$$

com $g_{ii} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right)^2 > 0$.

O elemento da distância se escreve como:

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij}\, dq_i\, dq_j \,,$$

que é uma 'forma quadrática simétrica' nos deslocamentos infinitesimais.

▸ Def. Sistema de coordenadas ortogonal

É o caso quando os vetores de coordenadas $\vec{D}_{q_i}$ são ortogonais aos pares

$$\vec{D}_{q_i}\cdot\vec{D}_{q_j} \underset{i\neq j}{=} 0 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = g_{ij} .$$

Neste caso, o tensor métrico resulta diagonal

$$ds^2 = g_{11}\, dq_1^2 + g_{22}\, dq_2^2 + g_{33}\, dq_3^2$$

Note que $d\vec{r} = \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i$,

de maneira que a velocidade fica expressa por:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i .$$

No caso ortogonal, definimos

$$h_i \equiv \sqrt{g_{ii}} > 0 ,$$

e temos vetores unitários por:

$$\hat{q}_i \equiv \frac{1}{h_i}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{1}{h_i} \vec{D}_{q_i} .$$

A velocidade, neste caso, fica:

$$\vec{v} = \sum_i h_i \dot{q}_i \hat{q}_i .$$

Para a energia cinética T escrevemos:

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m \sum_i g_{ii} \dot{q}_i^2$$

$$= \frac{1}{2} m \sum_i h_i^2 \dot{q}_i^2$$

Aplicação : cálculo do gradiente para coordenadas curvilíneas. Seja ∇f de uma função arbitrária

$$df = \nabla f \cdot d\vec{r} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i$$

$$= \sum_i \left(\nabla f \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) dq_i = \sum_i h_i \left(\nabla f \cdot \hat{q}_i\right) dq_i .$$

Resulta:

$$\nabla f \cdot \hat{q}_i = \frac{1}{h_i}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right),$$

ou seja:

$$\boxed{\nabla f = \sum_i \frac{1}{h_i}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right) \hat{q}_i .}$$

— o —

Tendo a velocidade em coordenadas curvilíneas, podemos proceder a calcular a aceleração:

$$\vec{v} = \sum_i h_i \dot{q}_i \hat{q}_i ,$$

ou seja, $v_i = h_i \dot{q}_i$.

O problema radica em que os vetores unitários $\hat{q}_i$ são dependentes do tempo. Temos a relação:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \left(h_i \ddot{q}_i + \dot{h}_i \dot{q}_i \right) \hat{q}_i +$$

$$+ \sum_i h_i \dot{q}_i \dot{\hat{q}}_i \, ,$$

com $\quad \dot{h}_i = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial h_i}{\partial q_j} \rightarrow$ isto é

$$\vec{a} = \sum_{i,j} \left(\delta_{ij} h_j \ddot{q}_i + \frac{\partial h_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \dot{q}_i \right) \hat{q}_i +$$

$$+ \sum_i h_i \dot{q}_i \dot{\hat{q}}_i \, ,$$

sendo $\quad \dot{\hat{q}}_i = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial q_j} .$

Truque do Sr. Lagrange :

Basta escrever a energia cinética T em coordenadas curvilíneas :

$$T = \frac{1}{2} m \sum_i g_{ii} \dot{q}_i^2 .$$

As componentes da aceleração são obtidas pela equação de Lagrange :

$$\boxed{m h_i a_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}}$$

Exemplo: Coordenadas polares esféricas (ver pag. 4)

$$(x, y, z) \longrightarrow (r, \theta, \varphi) \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \; 0 \leq \theta \leq \pi$$

$x = r \,\mathrm{sen}\theta \cos\varphi$, $\qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

$y = r \,\mathrm{sen}\theta \,\mathrm{sen}\varphi$, $\qquad \theta = \mathrm{Arctan}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$,

$z = r \cos\theta$. $\qquad \varphi = \mathrm{Arctan}\,(y/x)$.

Calculamos os vetores de coordenadas:

$$\vec{D}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \mathrm{sen}\theta \cos\varphi \,\hat{\imath} + \mathrm{sen}\theta \cos\varphi \,\hat{\jmath} + \cos\theta \,\hat{k}$$

$$= \hat{r} \quad (\text{unitário})$$

$$\vec{D}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r\left(\cos\theta \cos\varphi \,\hat{\imath} + \cos\theta \,\mathrm{sen}\varphi \,\hat{\jmath} - \mathrm{sen}\theta \,\hat{k}\right)$$

$$= r\,\hat{\theta}$$

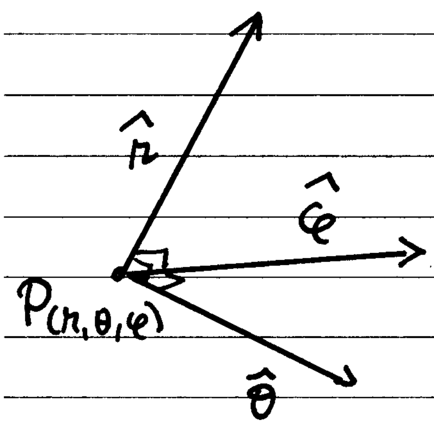
$$\vec{D}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = r \,\mathrm{sen}\theta \left(-\mathrm{sen}\varphi \,\hat{\imath} + \cos\varphi \,\hat{\jmath}\right)$$

$$= r \,\mathrm{sen}\theta \,\hat{\varphi}$$

Os três vetores unitários $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$ são ortogonais (fácil conferir). O tensor métrico do sistema de coordenadas resulta:

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \operatorname{sen}\theta > 0$$



Escrevemos o vetor velocidade:

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r \operatorname{sen}\theta\,\dot{\varphi}\,\hat{\varphi},$$

com componentes:

$$v_r = \dot{r},$$
$$v_\theta = r\dot{\theta},$$
$$v_\varphi = r \operatorname{sen}\theta\,\dot{\varphi},$$

e a energia cinética resulta:

$$T = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right).$$

Escrevemos o gradiente em coordenadas esféricas:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\varphi}.$$

Calculamos agora as componentes da aceleração, usando as eqs. de Lagrange:

$$m\,a_r = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot r}\right) - \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\cancel{2}\frac{m}{\cancel{2}}\dot r\right) - \frac{m}{\cancel{2}}\left(\cancel{2} r\,\dot\theta^2 + \cancel{2} r\,\mathrm{sen}^2\theta\,\dot\varphi^2\right)$$

$$\cancel{m}\,a_r = \cancel{m}\left(\ddot r - r\dot\theta^2 - r\,\mathrm{sen}^2\theta\,\dot\varphi^2\right).$$

$$\boxed{a_r = \ddot r - r\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\,\mathrm{sen}^2\theta\right).}$$

$$\cancel{m}\,\cancel{r}\,a_\theta = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\cancel{2}r^2\dot\theta\right) - \frac{m}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\, r^2\,\dot\varphi^2\right)$$

$$= \cancel{m}\left(2\cancel{r}\dot r\dot\theta + r^{\cancel{2}}\ddot\theta - r^{\cancel{2}}\dot\varphi^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\right)$$

Resulta:

$$\boxed{a_\theta = r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta - r\dot\varphi^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta.}$$

Finalmente:

$$a_\varphi m r \operatorname{sen}\theta = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\cancel{2}}\cancel{2}\dot\varphi r^2 \operatorname{sen}^2\theta\right) - 0$$

$$= m\left(\ddot\varphi r^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2r\dot r\dot\varphi \operatorname{sen}^2\theta + 2r^2\dot\varphi\dot\theta \operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)$$

$$= m r \operatorname{sen}\theta\left(r\ddot\varphi \operatorname{sen}\theta + 2\dot r\dot\varphi \operatorname{sen}\theta + 2r\dot\varphi\dot\theta\cos\theta\right)$$

Resultado:

$$\boxed{a_\varphi = r\ddot\varphi \operatorname{sen}\theta + 2\dot r\dot\varphi \operatorname{sen}\theta + 2r\dot\varphi\dot\theta\cos\theta}.$$

O sistema de vetores unitários $(\hat r, \hat\theta, \hat\varphi)$ é um sistema direito. Isso significa que:

$$\hat r \times \hat\theta = \hat\varphi, \quad \hat\theta \times \hat\varphi = \hat r, \quad \hat\varphi \times \hat r = \hat\theta$$

Calcular o momentum angular:

$$\vec L = \vec r \times \vec p = mr(\hat r \times \vec v)$$

$$= mr\, \hat r \times \left(\dot r \hat r + r\dot\theta\,\hat\theta + r \operatorname{sen}\theta\,\dot\varphi\,\hat\varphi\right)$$

$$= mr\left(r\dot\theta\,\hat\varphi + r\dot\varphi \operatorname{sen}\theta - (\hat\theta)\right)$$

$$= mr^2\left(\dot\theta\,\hat\varphi - \dot\varphi \operatorname{sen}\theta\,\hat\theta\right)$$

$$\vec{L} = mr^2\left(\dot{\theta}\,\hat{\varphi} - \dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\theta}\right)$$

$$\boxed{\vec{L}^2 = m^2 r^4 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}^2\theta\right)}$$

Exemplo importante: Forças centrais

$$\vec{F} = F(r)\,\hat{r}$$

Sabemos que neste caso $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ e $\vec{L}$ é uma constante de movimento. Sabemos também que a órbita fica num plano perpendicular ao momentum angular. Em coordenadas cartesianas:

$$\vec{F} = F\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\left(\frac{x}{r}\,\hat{i} + \frac{y}{r}\,\hat{j} + \frac{z}{r}\,\hat{k}\right)$$

$$F_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,F\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{x}{r}F(r)$$

$$F_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,F\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{y}{r}F(r)$$

$$F_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,F\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{z}{r}F(r)$$

Verificamos que:

$$\frac{\partial}{\partial y}F_z - \frac{\partial}{\partial z}F_y = 0$$

A expressão gera do Rotacional para coordenadas curvilíneas ortogonais (q_1, q_2, q_3) é

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(h_2 A_2)\right]\hat{q}_1 +$$

$$+ \frac{1}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(h_3 A_3)\right]\hat{q}_2 +$$

$$+ \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1 A_1)\right]\hat{q}_3 .$$

mesmo resultado para todas as outras componentes.

Resultado: $\nabla \times \vec{F} = 0$

e o campo de forças é conservativo.

Este resultado é obtido facilmente usando a expressão do Rotacional em coordenadas esféricas:

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\varphi \,\text{sen}\theta) - \frac{\partial}{\partial\varphi}F_\theta\right]\hat{r} +$$

$$+ \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\left[\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \text{sen}\theta\,\frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi)\right]\hat{\theta} +$$

$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right]\hat{\varphi}.$$

e para um campo central $F_\theta = F_\varphi = 0$ e

$$F_r = F_r(r).$$

Obtemos $\nabla \times \vec{F} = 0$ de maneira direta.

A energia potencial pode ser definida como uma integral de linha:

$$-\int_{(r_0,\theta_0,\varphi_0)}^{(r,\theta,\varphi)} d\vec{r}\cdot\vec{F} = -\int_{(r_0,\theta_0,\varphi_0)}^{(r_0,\theta,\varphi)} d\vec{r}\cdot\vec{F} - \int_{(r_0,\theta,\varphi)}^{(r,\theta,\varphi)} d\vec{r}\cdot\vec{F}$$

A primeira trajetória se desloca sobre a superfície de uma esfera de raio r_0

$$-\int_{(r_0,\theta_0,\varphi_0)}^{(r_0,\theta,\varphi)} d\vec{r}\cdot\vec{F} = 0 \quad ,$$

porque $\vec{F}$ é ortogonal ao deslocamento $d\vec{r}$.
Na segunda trajetória integramos sobre uma linha com (θ,φ) fixos:

$$-\int_{(r_0,\theta,\varphi)}^{(r,\theta,\varphi)} d\vec{r}\cdot\vec{F} = -\int_{r_0}^{r} dr F(r) \equiv V(r).$$

A energia total é conservada. Escrevemos:

$$E = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + V(r)$$

$$= \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 + r^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\theta\right)\right] + V(r)$$

Mas sabemos que $\vec{L}$ também é conservado, com

$$L^2 = m^2 r^4 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\theta\right) = cte.$$

ou $$\frac{mr^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\theta\right) = \frac{L^2}{2mr^2}.$$

A conservação da energia fica

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

e se assemelha ao problema 1-dim, com um potencial efetivo:

$$V_{ef}(r) \equiv V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} .$$

A parte $\frac{L^2}{2mr^2}$ é chamado de 'Potencial centrífugo' e representa energia cinética de rotação. Este potencial é altamente repulsivo perto da origem.

Antes de integrar a eq. da órbita para

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{ef}(r) ,$$

é bom determinar os pontos de retorno para a coordenada r; isto soluções de

$$E = V_{ef}(r) .$$

Também é conveniente orientar o sistema de coordenadas, de maneira que o eixo 'z' coincida com a direção e sentido do momentum angular. A órbita se localiza no plano perpendicular (plano x-y) e usamos coordenadas (r, φ) para descrever o movimento

$$\vec{L} = m r^2 \dot{\varphi} \, \hat{k}$$

com $$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$$

Integramos agora a partir da conservação da energia (como no caso de 1-dim):

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V_{ef}(r)\right]},$$

com
$$\boxed{t - t_0 = \pm\int_{r_0}^{r} dr' \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V_{ef}(r')\right]}}} \quad , (1)$$

fornecendo a integração para a coordenada r. O sinal $\pm$ depende do ramo da velocidade radial, que muda de sinal nos pontos de retorno. A integração da órbita se completa com

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2},$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi - \varphi_0 = \int_{t_0}^{t} dt' \frac{L}{mr^2}} \qquad (2)$$

<u>Constantes de integração</u>: E, L, r_0, φ_0 + duas constantes que fornecem a direção de $\vec{L}$.

Essas duas últimas foram usadas para orientar o sistema de coordenadas.

As eqs. (1) e (2) fornecem a órbita em forma paramétrica, com o tempo como parâmetro. Mas o parâmetro pode ser eliminado, notando que

$$dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V_{ef}(r)\right]}}$$

e que

$$d\varphi = \frac{L}{mr^2}\,dt = \pm \frac{(L/mr^2)\,dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V_{ef}(r)\right]}},$$

obtendo de maneira direta a equação da órbita:

$$\boxed{\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{dr' \;\left(L/mr'^2\right)}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V_{ef}(r')\right]}}}$$

Como alternativa, podemos estudar as eqs. de Newton para uma força central:

A eq. para a parte radial é

$$ma_r = m\ddot{r} - mr\left(\dot{\theta} + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\theta\right) = F(r),$$

mas

$$mr\left(\dot{\theta} + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\theta\right) = \frac{L^2}{mr^3}$$

Obtemos:

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = F(r)$$

Passando para coordenadas polares (r, φ) no plano

$$L = mr^2\dot{\varphi}$$

ou

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}.$$

A órbita, em coordendadas polares, será dada por uma função

$$r = r(\varphi)$$

<u>Mudança de variável</u>: $u(\varphi) \equiv \dfrac{1}{r(\varphi)}$

Substituir na eq. de Newton:

$$\dot{r} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{u(\varphi)}\right] = -\frac{1}{u^2}\,\dot{\varphi}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)$$

e $$\frac{\dot{\varphi}}{u^2} = \frac{L}{m} \Rightarrow \dot{r} = -\frac{L}{m}\left(\frac{du}{d\varphi}\right).$$

Tomando a 2ª derivada temporal:

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m}\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right)\dot{\varphi} = -\left(\frac{L}{m}\right)^2 u^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right).$$

Finalmente:

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{L^2}{m}u^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right) - u^3\frac{L^2}{m} = F(1/u)$$

e isolando a 2ª derivada:

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\varphi^2} = -u - \frac{m}{u^2L^2}F(1/u).} \qquad (*)$$

Esta relação permite determinar a lei de força se a trajetória é conhecida.

Exemplo:

Suponha que a trajetória é uma elipse, que em coordenadas polares tem a forma:

$$\frac{1}{r} = u = \frac{1}{p}\left(1 + \varepsilon \cos\varphi\right)$$

Parâmetros da órbita:

$2p$: 'latus rectum'

ε : excentricidade, $0 \leq \varepsilon \leq 1$

$$u_{max} = \frac{1}{p}(1+\varepsilon), \quad u_{min} = \frac{1}{p}(1-\varepsilon)$$

Temos:

$$\frac{du}{d\varphi} = -\frac{\varepsilon}{p}\,\text{sen}\varphi, \quad \frac{d^2u}{d\varphi^2} = -\frac{\varepsilon}{p}\cos\varphi$$

Substituindo na eq. de Newton

$$\cancel{-\frac{\varepsilon}{p}\cos\varphi} = -\frac{1}{p}(1 + \cancel{\varepsilon\cos\varphi}) - \frac{m}{u^2L^2}F$$

$$F = -\frac{L^2}{mp}u^2 \Rightarrow F(r) = -\frac{k}{r^2}$$

com $k = \frac{L^2}{mp}$.